

Variácie s opakovaním

D. Variácie *k*-tej triedy z *n* prvkov s opakovaním sú všetky usporiadané *k*-tice vytvorené z *n* prvkovej množiny, kde prvky sa môžu opakovať v jednotlivých *k*-ticiach.

V. Počet variácií s opakovaním môžeme vypočítať vzorcom:

$$V'_k(n) = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_k = n^k$$

príklad:

Utvorte všetky variácie druhej triedy s opakovaním z prvkov a, b, c, d.

[a; a], [a; b], [a; c], [a; d],
[b; a], [b; b], [b; c], [b; d],
[c; a], [c; b], [c; c], [c; d],
[d; a], [d; b], [d; c], [d; d]

Koľko rôznych prirodzených päťciferných čísel možno zostaviť z číslíc 1; 2; 3; 4; 5; 6, ak číslice sa môžu opakovať?

$$V'_5(6) = 6^5 = 7\,776$$

Koľko rôznych prirodzených päťciferných čísel možno zostaviť z číslíc 0; 1; 2; 3; 4; 5, ak číslice sa môžu opakovať?

aj tieto príklady môžeme riešiť dvojakým spôsobom: vzorcom a úvahou
vypočítať päťciferné (spolu aj s tými číslami, kde na prvom mieste je nula) – predchádzajúci výsledok potom z tohto počtu odrátať toľko, koľko z tých vytvorených čísel sa začína nulou – čiže počet štvorciferných čísel zostavených zo všetkých číslíc

$$V'_5(6) - V'_4(6) = 7\,776 - 1\,296 = 6\,480$$

úvahou: na prvé miesto nemôže ísť nula (5 možností); na ostatné už všetkých šesť
 $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6\,480$

Koľko rôznych prirodzených jedno- až päťciferných čísel možno utvoriť z číslíc 0, 1, 2?

jednociferné: = 2
dvojciferné: $V'_2(3) - V'_1(3) = 2 \cdot 3 = 6$
trojciferné: $V'_3(3) - V'_2(3) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$
štvorciferné: $V'_4(3) - V'_3(3) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 54$
päťciferné: $V'_5(3) - V'_4(3) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 162$
spolu: = 242

Koľko rôznych párnych štvorciferných čísel možno zostaviť z číslíc 1; 2; 3; 4; 5, ak číslice sa môžu opakovať?

číslo je párne, ak končí párnym číslom → začneme od konca
na poslednú pozíciu (na štvrté miesto) môže ísť iba 2 alebo 4 – dve možnosti
na ostatné už hociktorá

$$2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 250 = 2 \cdot V'_3(5)$$

Koľko rôznych prvkov dá 14 641 variácií štvrtej triedy s opakovaním?

$$\begin{aligned} V'_4(n) &= 14\,641 \\ n^4 &= 14\,641 & / \sqrt[4]{} \\ n &= 11 \end{aligned}$$

Ak zväčšíme počet prvkov o trinásť, zväčší sa počet variácií štvrtej triedy s opakovaním 16-krát. Určte pôvodný počet prvkov *n*.

$$\begin{aligned} n &\in \mathbb{N} \\ V'_4(n+13) &= 16 \cdot V'_4(n) \\ (n+13)^4 &= 16 \cdot n^4 & /: n^4 \\ \frac{(n+13)^4}{n^4} &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+13}{n}\right)^4 &= 16 & / \sqrt[4]{} \\ \frac{n+13}{n} &= 2 & / \cdot n \\ n + 13 &= 2n & / -n \\ 13 &= n \end{aligned}$$

Ak zväčšíme počet prvkov o jeden, zväčší sa počet variácií tretej triedy s opakovaním o 169. Určte pôvodný počet prvkov n .

$$n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} V_3'(n+1) &= V_3'(n) + 169 \\ (n+1)^3 &= n^3 + 169 \\ n^3 + 3n^2 + 3n + 1 &= n^3 + 169 & / - n^3 - 169 \\ 3n^2 + 3n - 168 &= 0 & / :3 \\ n^2 + n - 56 &= 0 \\ (n+8)(n-7) &= 0 \\ n+8 &= 0 & n-7 &= 0 \\ n_1 &= -8 & n_2 &= 7 \end{aligned}$$

Koľko je daných prvkov, ak z nich utvorených variácií štvrtej triedy s opakovaním je 81-krát viac ako variácií druhej triedy?

$$n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} V_4'(n) &= 81 \cdot V_2'(n) \\ n^4 &= 81 \cdot n^2 & / : n^2 \\ n^2 &= 81 & / \sqrt{} \\ n &= 9 \end{aligned}$$