

Postupnosti

D. Postupnosť je funkcia, ktorá je definovaná na podmnožine prirodzených čísel (nezabudnime, že aj samotná množina je podmnožinou samej sebe – čiže môže byť definičným oborom celá množina prirodzených čísel). Ak oborom funkčných hodnôt sú čísla, potom ju nazveme **číselnou postupnosťou**.

Postupnosť sa skladá z členov.

$$\{a_n\}_1^7: 11; -8; \frac{5}{3}; \pi; \sqrt{6}; 0; 102$$

$$\{b_n\}_1^\infty: 1; 3; 5; 7; 9; \dots$$

$$\{c_n\}_1^\infty: -1; -1; 1; 5; 11; 19; 29; 41$$

P. Ak nepotrebujeme vyšpecifikovať počet členov postupnosti, môžeme použiť kratšiu verziu označenia postupnosti: $\langle d_n \rangle$.

Všeobecný alebo ***n*-tý člen postupnosti** a označujeme a_n . Pravý dolný index znamená poradové číslo postupnosti – sú to presne čísla z definičného oboru. Ak ide o konkrétny člen postupnosti, potom do indexu pôjde konkrétne prirodzené číslo – poradové číslo člena.

$a_4 = \pi$	štvrtý člen postupnosti a
$b_{11} = 21$	jedenásty člen postupnosti b
$c_9 = 55$	deviaty člen postupnosti c

konečná postupnosť – má konečný počet členov (definičný obor je konečná množina)

nekonečná postupnosť – má nekonečný počet členov (definičný obor je celá množina \mathbb{N})

rastúca postupnosť – ďalší člen postupnosti je vždy väčší ako predchádzajúci:

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} > a_n \Rightarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} - a_n > 0 \wedge \forall n \in \mathbb{N}: \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 (a_n \neq 0)$$

P. Pri konečných postupnostiach vo všetkých definíciách a vlastnostiach (aj nižšie) množinu \mathbb{N} treba zúžiť (znamená nahradiť) na čísla z definičného oboru postupnosti – na možné indexy n .

klesajúca postupnosť – ďalší člen postupnosti je vždy menší ako predchádzajúci:

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} < a_n \Rightarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} - a_n < 0 \wedge \forall n \in \mathbb{N}: \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 (a_n \neq 0)$$

neklesajúca postupnosť – ďalší člen postupnosti je vždy väčší ako predchádzajúci alebo sa mu rovná:

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} - a_n \geq 0 \wedge \forall n \in \mathbb{N}: \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 (a_n \neq 0)$$

nerastúca postupnosť – ďalší člen postupnosti je vždy menší ako predchádzajúci alebo sa mu rovná:

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} - a_n \leq 0 \wedge \forall n \in \mathbb{N}: \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 (a_n \neq 0)$$

alternujúca postupnosť – párne a nepárne členy majú opačné znamienka:

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} \cdot a_n < 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \frac{a_{n+1}}{a_n} < 0 (a_n \neq 0)$$

zdola ohraničená postupnosť – všetky členy postupnosti sú väčšie alebo sa rovnajú D :

$$\exists D \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq D$$

zhora ohraničená postupnosť – všetky členy postupnosti sú menšie alebo sa rovnajú H :

$$\exists H \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq H$$

ohraničená postupnosť – aj zdola aj zhora ohraničená

$$\exists D; H \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: D \leq a_n \leq H$$

určenie postupnosti:

a, **vymenovaním všetkých členov postupnosti** – napíšeme všetky členy postupnosti

- teoreticky iba konečné postupnosti môžeme tak určiť (Niekedy stretneme aj nekonečné postupnosti určené týmto spôsobom. Vtedy vymenujeme toľko členov postupnosti, aby z toho už bolo jednoznačná samotná postupnosť.)

$$\{d_n\}_1^5: 6; 7; 11; 19; 28$$

$$\{e_n\}_1^\infty: 5; 10; 15; 20; 25; 30; \dots$$

b, **určením všeobecného členu postupnosti** – predpis (vzorec obsahujúci výraz s premennou n) na výpočet n -tého členu postupnosti

- môžeme aj konečné aj nekonečné postupnosti určiť

- hneď vieme určiť ktorýkoľvek člen takto určenej postupnosti

$$\{f_n\}_1^{20}: f_n = 4n - 3 \wedge n \in \mathbb{N} \wedge n \in \langle 1; 20 \rangle \rightarrow f_{13} = 4 \cdot 13 - 3 = 52 - 3 = 49$$

$$\{g_n\}_1^\infty: g_n = n^2 + n \wedge n \in \mathbb{N} \rightarrow g_{98} = 98^2 + 98 = 9\,604 + 98 = 9\,702$$

c, **rekurentným spôsobom** – predpis obsahujúci predchádzajúci alebo viac predchádzajúcich členov na výpočet n -tého členu postupnosti

- žiaľ tu musíme poznať všetky predchádzajúce členy postupnosti, aby sme mohli určiť n -tý člen

- toľko prvých členov musí byť daný zo začiatku postupnosti, koľko rôznych členov obsahuje takýto predpis

$$\{h_n\}_1^\infty: h_{n+2} = 3h_{n+1} - 2h_n \wedge h_1 = 2; h_2 = 5; \wedge n \in \mathbb{N} \rightarrow h_7 = ?$$

$$h_7 = 3h_6 - 2h_5$$

$$h_6 = 3h_5 - 2h_4$$

$$h_5 = 3h_4 - 2h_3$$

$$h_4 = 3h_3 - 2h_2$$

$$h_3 = 3h_2 - 2h_1 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 15 - 4 = 11$$

$$h_4 = 3h_3 - 2h_2 = 3 \cdot 11 - 2 \cdot 5 = 33 - 10 = 23$$

$$h_5 = 3h_4 - 2h_3 = 3 \cdot 23 - 2 \cdot 11 = 69 - 22 = 47$$

$$h_6 = 3h_5 - 2h_4 = 3 \cdot 47 - 2 \cdot 23 = 141 - 46 = 95$$

$$h_7 = 3h_6 - 2h_5 = 3 \cdot 95 - 2 \cdot 47 = 285 - 94 = 191$$

Najznámejšia rekurentným spôsobom daná postupnosť je **Fibonacciho postupnosť**. Každý ďalší člen postupnosti sa počíta z dvoch predchádzajúcich. Konkrétne ako ich súčet.

prvé dva členy sú dané: $F_1 = F_2 = 1$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Fibonacciho čísla sú potom: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; ...

V. (Binetov vzorec)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

$$\text{charakteristická rovnica: } x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

príklad:

Napište prvých päť členov postupnosti:

$$\text{a, } a_n = 2 + 3n$$

$$\text{b, } b_n = 4n(n - 3)$$

$$\text{c, } c_n = 5[(-1)^n + 1]$$

$$\text{a, } a_1 = 2 + 3 \cdot 1 = 2 + 3 = 5$$

$$a_2 = 2 + 3 \cdot 2 = 2 + 6 = 8$$

$$a_3 = 2 + 3 \cdot 3 = 2 + 9 = 11$$

$$a_4 = 2 + 3 \cdot 4 = 14$$

$$a_5 = 2 + 3 \cdot 5 = 17$$

$$\text{b, } b_1 = 4 \cdot 1 \cdot (1 - 3) = 4 \cdot (-2) = -8$$

$$b_2 = 4 \cdot 2 \cdot (2 - 3) = 8 \cdot (-1) = -8$$

$$b_3 = 4 \cdot 3 \cdot (3 - 3) = 12 \cdot 0 = 0$$

$$b_4 = 4 \cdot 4 \cdot (4 - 3) = 16 \cdot 1 = 16$$

$$b_5 = 4 \cdot 5 \cdot (5 - 3) = 20 \cdot 2 = 40$$

$$\text{c, } c_1 = 5 \cdot [(-1)^1 + 1] = 5 \cdot (-1 + 1) = 5 \cdot 0 = 0$$

$$c_2 = 5 \cdot [(-1)^2 + 1] = 5 \cdot (1 + 1) = 5 \cdot 2 = 10$$

$$c_3 = 5 \cdot [(-1)^3 + 1] = 5 \cdot (-1 + 1) = 0$$

$$c_4 = 5 \cdot [(-1)^4 + 1] = 5 \cdot (1 + 1) = 10$$

$$c_5 = 5 \cdot [(-1)^5 + 1] = 5 \cdot (-1 + 1) = 0$$

Napíšte prvých desať členov postupnosti danej rekurentne:

$$a, a_1 = 5, a_2 = 7; a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$$

$$b, b_1 = -4; b_{n+1} = b_n + 3$$

$$a, a_3 = a_2 - a_1 = 7 - 5 = 2$$

$$a_4 = a_3 - a_2 = 2 - 7 = -5$$

$$a_5 = a_4 - a_3 = -5 - 2 = -7$$

$$a_6 = a_5 - a_4 = -7 - (-5) = -2$$

$$a_7 = a_6 - a_5 = -2 - (-7) = 5$$

$$a_8 = a_7 - a_6 = 5 - (-2) = 7$$

$$a_9 = a_8 - a_7 = 7 - 5 = 2$$

$$a_{10} = a_9 - a_8 = 2 - 7 = -5$$

$$b, b_2 = b_1 + 3 = -4 + 3 = -1$$

$$b_3 = b_2 + 3 = -1 + 3 = 2$$

$$b_4 = b_3 + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$b_5 = 5 + 3 = 8; b_6 = 8 + 3 = 11; b_7 = 11 + 3 = 14$$

$$b_8 = 14 + 3 = 17; b_9 = 17 + 3 = 20; b_{10} = 20 + 3 = 23$$

Vyjadrite n-tý člen postupnosti:

$$a, x; 3x; 5x; 7x; \dots$$

$$b, a; a^2; a^4; a^8; \dots$$

$$c, \frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; \frac{3}{5}; -\frac{2}{3}; \dots$$

$$d, 1; 3; 9; 27; 81; \dots$$

$$a, a_n = (2n - 1)x$$

$$b, b_n = a^{2^{n-1}}$$

$$c, c_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{n+2}$$

$$d, d_n = 3^{n-1}$$