

Aritmetická postupnosť

pr.

$$\langle a_n \rangle: 1; 2; 3; 4; 5; \dots$$

$$\langle b_n \rangle: 23; 19; 15; 11; 7; \dots$$

$$\langle c_n \rangle: -4,2; -3,9; -3,6; -3,3; -3; \dots$$

D. Postupnosť je aritmetická, ak rozdiel ľubovoľných dvoch za sebou idúcich členov je konštantný. Ten konštantný rozdiel sa volá **diferencia aritmetickej postupnosti**, a označuje sa písmenom d .

$$\exists d \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: d = a_{n+1} - a_n$$

P. Samozrejme ten rozdiel sa počíta tak, že vždy od neskoršieho člena odčítame predchádzajúci člen postupnosti.

Ak upravíme vzťah – vyjadríme neskorší člen, potom vlastne dostaneme rekurentný vzťah na výpočet členov aritmetickej postupnosti. Ďalší člen aritmetickej postupnosti dostanem, ak pripočítam diferenciu k predchádzajúcemu členu.

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Ak prenesiem diferenciu na druhú stranu, dostanem:

$$a_{n+1} - d = a_n$$

Toto zase znamená, že ak odčítam od člena diferenciu, dostanem predchádzajúci člen aritmetickej postupnosti.

Vráťme sa k prvému tvaru a konkretizujme:

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2 \cdot d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2 \cdot d) + d = a_1 + 3 \cdot d$$

$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3 \cdot d) + d = a_1 + 4 \cdot d$$

Ak to zovšeobecníme, dostaneme prvý vzorec:

V. výpočet všeobecného (n-tého) člena z prvého člena pomocou diferencie

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

To znamená, že hociktorý člen aritmetickej postupnosti môžeme vypočítať ak poznáme prvý člen a diferenciu.

Vyjadrime teraz dva členy aritmetickej postupnosti podľa toho vzorca. Potom z jednej rovnice vyjadrime prvý člen, čo potom dosadíme do druhej.

$$a_r = a_1 + (r - 1) \cdot d \rightarrow a_r - (r - 1) \cdot d = a_1$$

$$a_n = a_r - (r - 1) \cdot d + (n - 1) \cdot d = a_r - r \cdot d + d + n \cdot d - d = a_r - r \cdot d + n \cdot d = a_r + d \cdot (n - r)$$

V. výpočet ľubovoľného (n-tého) člena z iného (r-tého) člena pomocou diferencie

$$a_r = a_s + (r - s) \cdot d$$

To znamená, že hociktorý člen aritmetickej postupnosti môžeme vypočítať ak poznáme jeden člen a diferenciu.

Ako „chápať“ spolu tieto dva vzorce?

Keď počítame neskorší člen (s väčším indexom/poradovým číslom) aritmetickej postupnosti zo skoršieho (s menším indexom), potom toľko násobok diferencie pripočítame, o koľko neskoršie je ten hľadaný člen v poradí. Ak počítame skorší člen, potom odčítame toľko násobok diferencie.

súčet prvých n členov postupnosti

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

vyjadríme každý člen pomocou prvého a diferencie

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \dots + (a_1 + [n - 2]d) + (a_1 + [n - 1]d)$$

vyjadríme každý člen pomocou n-tého a diferencie

$$S_n = (a_n - [n - 1]d) + (a_n - [n - 2]d) + (a_n - [n - 3]d) + \dots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n$$

sčítajme teraz rovnice

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

ten súčet v zátvorkách je presne n-krát na pravej strane

$$2 \cdot S_n = n \cdot (a_1 + a_n) \quad /:2$$

V. súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Súčet prvých n členov aritmetickej postupnosti dostanem, ak aritmetický priemer krajných členov vynásobím s počtom sčítaných členov.

A prečo dostala táto postupnosť práve ten názov aritmetická? Zoberme tri za sebou idúce členy postupnosti. Vyjadriť krajné dva pomocou prostredného člena:

$$a_n; a_{n+1}; a_{n+2}$$

$$a_n = a_{n+1} - d$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + d$$

sčítajme rovnice

$$a_n + a_{n+2} = a_{n+1} - d + a_{n+1} + d$$

$$a_n + a_{n+2} = a_{n+1} + a_{n+1}$$

$$a_n + a_{n+2} = 2 \cdot a_{n+1} \quad /:2$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$$

V. Každý člen aritmetickej postupnosti (okrem prvého) je aritmetickým priemerom dvoch susedných členov.

príklad:

Napište prvých päť členov aritmetickej postupnosti, ak:

a, $a_1 = 7$; $d = 6$

b, $b_4 = 1$; $d = -0,2$

c, $c_{18} = -9$; $d = 3$

d, $e_7 = 14$; $e_8 = 5$

e, $f_6 = -5$; $f_{10} = 19$

$$a, a_2 = a_1 + d = 7 + 6 = 13$$

$$a_3 = a_2 + d = 13 + 6 = 19$$

$$a_4 = a_3 + d = 19 + 6 = 25$$

$$a_5 = a_4 + d = 25 + 6 = 31$$

$$b, b_5 = b_4 + d = 1 + (-0,2) = 0,8$$

$$b_3 = b_4 - d = 1 - (-0,2) = 1,2$$

$$b_2 = b_3 - d = 1,2 - (-0,2) = 1,4$$

$$b_1 = b_2 - d = 1,4 - (-0,2) = 1,6$$

c, prvý člen aritmetickej postupnosti c je o 17 skôr, ako daný 18. člen

$$c_1 = c_{18} - 17 \cdot d = -9 - 17 \cdot 3 = -9 - 51 = -60$$

$$c_2 = c_1 + d = -60 + 3 = -57$$

$$c_3 = -57 + 3 = -54$$

$$c_4 = -54 + 3 = -51$$

$$c_5 = -51 + 3 = -48$$

d, dané sú dva za sebou idúce členy aritmetickej postupnosti – ich rozdiel sa rovná diferencie

$$d = d_8 - d_7 = 5 - 14 = -9$$

$$e_1 = e_7 - 6 \cdot d = 14 - 6 \cdot (-9) = 68$$

$$e_2 = e_1 + d = 68 + (-9) = 59$$

$$e_3 = 59 + (-9) = 50$$

$$e_4 = 50 + (-9) = 41$$

$$e_5 = 41 + (-9) = 32$$

e, dané sú dva členy aritmetickej postupnosti – ich rozdiel toľko násobok diferencie, koľko je medzi nimi v poradí rozdiel

$$4 \cdot d = f_{10} - f_6 = 19 - (-5) = 24$$

$$d = 6$$

$$f_1 = f_6 - 5 \cdot d = -5 - 5 \cdot 6 = -35$$

$$f_2 = f_1 + d = -35 + 6 = -29$$

$$f_3 = -29 + 6 = -23$$

$$f_4 = -23 + 6 = -17$$

$$f_5 = -17 + 6 = -11$$

Napište n-tý člen aritmetickej postupnosti pomocou n, keď

$$a, a_1 = 6; d = 7$$

$$b, b_8 = 11; d = -2$$

$$a, a_n = a_1 + (n-1).d = 6 + (n-1).7 = 6 + 7n - 7 = 7n - 1$$

$$b, b_n = b_8 + (n-8).d = 11 + (n-8).(-2) = 11 - 2n + 16 = 27 - 2n$$

V aritmetickej postupnosti určte prvý člen; n-tý člen a s_n :

$$a, a_{14} = 33; d = \frac{2}{5}; n = 20$$

$$b, b_{30} = -20; d = -0,1; n = 50$$

$$a, a_1 = a_{14} - 13.d = 33 - 13.\frac{2}{5} = 33 - \frac{26}{5} = \frac{139}{5}$$

$$a_{20} = a_{14} + 6.d = 33 + 6.\frac{2}{5} = 33 + \frac{12}{5} = \frac{177}{5}$$

$$s_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = \frac{\frac{139}{5} + \frac{177}{5}}{2} \cdot 20 = \frac{316}{5} \cdot 10 = 158$$

$$b, b_1 = b_{30} - 29.d = -20 - 29.(-0,1) = -20 + 2,9 = -17,1$$

$$b_{50} = b_{30} + 20.d = -20 + 20.(-0,1) = -20 - 2 = -22$$

$$s_{50} = \frac{b_1 + b_{50}}{2} \cdot 50 = \frac{-17,1 + (-22)}{2} \cdot 50 = -39,1 \cdot 25 = -977,5$$

V aritmetickej postupnosti je dané:

$$a, a_1 = -13; d = 4; a_n = 59. \text{ Vypočítajte } n, s_n;$$

$$b, d = -3; s_{16} = -280. \text{ Vypočítajte } b_1, b_{16};$$

$$a, a_n = a_1 + (n-1).d = -13 + (n-1).4 = -13 + 4n - 4 = 4n - 17$$

$$59 = 4n - 17 \quad /+17$$

$$76 = 4n \quad /:4$$

$$19 = n$$

$$s_{19} = \frac{a_1 + a_{19}}{2} \cdot 19 = \frac{-13 + 59}{2} \cdot 19 = 23 \cdot 19 = 437$$

$$b, b_{16} = b_1 + 15.d = b_1 + 15.(-3) = b_1 - 45$$

$$s_{16} = \frac{b_1 + b_{16}}{2} \cdot 16 = (b_1 + b_1 - 45).8 = 16b_1 - 360$$

$$-280 = 16b_1 - 360 \quad /+360$$

$$80 = 16b_1 \quad /:16$$

$$5 = b_1$$

$$b_{16} = b_1 - 45 = 5 - 45 = -40$$

Vypočítajte prvý člen a diferenciu aritmetickej postupnosti, kde platí:

$$a, a_3 + a_6 + a_8 = 17$$

$$a_2 - a_4 - a_5 = -11$$

$$b, 2b_4 - 3b_7 = 15$$

$$b_2 + 4b_5 - b_6 = 12$$

a, každý člen vyjadrime prvým členom a diferenciou – pozor na znamienka

$$a_1 + 2d + a_1 + 5d + a_1 + 7d = 17$$

$$a_1 + d - (a_1 + 3d) - (a_1 + 4d) = -11$$

$$3a_1 + 14d = 17$$

$$-a_1 - 6d = -11 \quad /:3$$

$$3a_1 + 14d = 17$$

$$-3a_1 - 18d = -33 \quad /I. + II.$$

$$-4d = -16 \quad /:(-4)$$

$$d = 4$$

$$-a_1 - 6.4 = -11$$

$$-a_1 - 24 = -11 \quad /+24$$

$$-a_1 = 13 \quad /:(-1)$$

$$a_1 = -13$$

b,

$$2 \cdot (b_1 + 3d) - 3(b_1 + 6d) = 15$$

$$b_1 + d + 4 \cdot (b_1 + 4d) - (b_1 + 5d) = 12$$

$$2b_1 + 6d - 3b_1 - 18d = 15$$

$$b_1 + d + 4b_1 + 16d - b_1 - 5d = 12$$

$$-b_1 - 12d = 15$$

$$4b_1 + 12d = 12$$

$$3b_1 = 27$$

/:3

$$b_1 = 9$$

$$-9 - 12d = 15$$

/+9

$$-12d = 24$$

/:(-12)

$$d = -2$$