Lineáris egyenletrendszerek
(Sústavy lineárnych rovníc)

D. Egyenletrendszernek nevezzük legalább két ismeretlent tartalmazó két egyenlet összességét.
M. Tételezzük fel, hogy egyenletrendszerünk k egyenletből áll, és az egyenletekben előforduló összes ismeretlenek száma pedig n (nem kell a rendszer minden egyenletének tartalmaznia az összes ismeretlent.).

egy rendezett szám n-es az egyenletrendszer megoldása (usporiadaná n-tica čísel je riešením sústavy rovníc) – az ismeretlenek értékeit behelyettesítve az egyenletrendszer minden egyenletébe, mindegyikben fennáll az egyenlőség (az egyenletek mindkét oldalán azonos értékeket kapunk)

M. Ne felejtsük, hogy az egyenletrendszer egy megoldása mindig több számot jelent, pontosan annyit, mint az ismeretlenek száma – n.

megoldani az egyenletrendszert (riešiť sústavu rovníc) – megkeresni az egyenletrendszer összes megoldását
megoldáshalmaz (množina riešení) – az egyenletrendszer megoldásait tartalmazó halmaz
az egyenletrendszer ekvivalens átalakítása (ekvivalentná úprava sústavy rovníc) – az egyenletrendszernek az átalakítás előtt és után pontosan ugyanaz a megoldáshalmaza → nem adódik hozzá és nem tűnik el megoldás

ekvivalens átalakítások:

- az egyenletrendszer egyenletének mindkét oldalához hozzáadhatjuk ugyanazt a számot vagy kifejezést → tagok átvitele az egyenlet egyik oldaláról a másikra
- az egyenletrendszer egyenletének mindkét oldalát megszorozhatjuk ugyanazzal a **nullától különböző** számmal vagy kifejezéssel → törtek és együtthatók eltüntetése
- az egyenletrendszer egyenleteit összeadhatjuk (összevonhatjuk): bal oldalt a bal oldallal, jobbat a jobbal → az ismeretlenek számának redukálása (az ismeretlenek számának csökkentése – egyszerre akár többet is) vagy az ismeretlen eliminálása (eltüntetése)

M. Még egy „átalakítás”: megváltoztathatjuk az egyenletrendszer egyenleteinek sorrendjét. De pontosan úgy, ahogy az egyenletek megoldásánál említettük az egyenlet oldalainak kicserélését, hogy az nem valódi átalakítás, így ez sem minősül annak, mivel nem visz közelebb az egyenletrendszer megoldásához.

ellenőrzés/próba (skúška správnosti) – az eredményt/eredményeket behelyettesítjük az egyenletrendszer egyenleteinek eredeti alakjába (mindegyik egyenletbe) → ha érvényes az egyenlőség minden egyenletben, akkor megoldás, egyébként nem.
M. Tetszőleges egyenletrendszer-típusnál a teljes megoldás mindig tartalmazza az ellenőrzést (próbát) is.

az egyenletrendszerek osztályozása:

az egyenletek száma szerint: két-, három-, … egyenletből álló egyenletrendszer
az ismeretlenek száma szerint: két-, három-, … ismeretlenes egyenletrendszer
a fokszám szerint: lineáris, másodfokú, …

Hogy járjunk el egy egyenletrendszer megoldásánál? Fokozatosan elimináljuk az ismeretleneket, hogy végül az egyenletben csak egyetlen ismeretlen maradjon. Kezdjük a legegyszerűbbekkel:

Két lineáris egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszer
Általános alakja (átalakítások után: törteket eltüntetve, zárójeleket felbontva, tagokat rendezve és összevonva):

$$a_1x + b_1y = c_1$$, ahol $a_1; a_2; b_1; b_2; c_1; c_2 \in \mathbb{R}$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

M. Az egyenletek átalakítása során mindkét egyenletet írjuk párhuzamosan (még ha az egyik már tejesen át is van alakítva) és a második egyenletet aláhúzzuk (ezzel elválasztjuk az átalakítás következő lépésétől).

T. Az így átalakított egyenletrendszernek a megoldása, ha létezik, az alábbi számpár (feltétel: $a_1.b_2 - a_2.b_1 \neq 0$):

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

Ezt a képletet nem szokás használni, és nem is szeretném, ha a megoldásnál alkalmaznátok. Különböző módok, eljárások vannak, melyekkel megoldhatjuk az egyenletrendszert.
Még a kétismeretlenes két egyenletből álló egyenletrendszer megoldásainak számáról nem beszéltünk. Az ilyennek lehet:

a, egy megoldása (számpár) – a példák túlnyomó többsége b, végtelen sok megoldása – de nem tetszőleges számpár: az egyik ismeretlen értékének megválasztása már meghatározza a másik ismeretlenét (az egyik ismeretlent kifejezzük a másik segítségével az egyenletrendszer valamelyik egyenletéből); hasonlóan az egyenletekéhez: eredményként igaz állítást kapunk (azonos számok egyenlőségét)

c, nincs megoldása – eredményként egy hamis állítás kapunk (két különböző szám egyenlőségét)

1. behelyettesítéses módszer (dosadzovacia/substitučná metóda):

- az egyenletrendszer egyik egyenletéből kifejezzük az egyik ismeretlent (abból az egyenletből és azt az ismeretlent célszerű, ahol a legkisebb együtthatóval rendelkezik – a nullához legközelebbi egész szám – mivel a kifejezés során ezen együtthatóval kell majd osztani az egyenletet), ezután a másik egyenletben az ismeretlen helyére behelyettesítjük a kifejezés másik oldalát
- ezután az egyenletben már csak egy ismeretlen marad, amit könnyedén kifejezhetünk
- a másik ismeretlen kiszámítása a kapott eredmény visszahelyettesítésével a kifejezett egyenletbe történik

$$\begin{aligned} 2x + y &= -0{,}5 && /-2x \\ \underline{5x + 3y} &\underline{= -2} \\ y &= -0{,}5 - 2x \\ 5x + 3(-0{,}5 - 2x) &= -2 \\ 5x - 1{,}5 - 6x &= -2 \\ -x - 1{,}5 &= -2 && /+1{,}5 \\ -x &= -0{,}5 && /.(-1) \\ x &= 0{,}5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -0{,}5 - 2.0{,}5 \\ y &= -0{,}5 - 1 \\ y &= -1{,}5 \end{aligned}$$

ellenőrzés:

B_1: 2.0,5 + (-1,5) = 1 – 1,5 = -0,5
J_1: -0,5
$B_1 = J_1$

B_2: 5.0,5 + 3.(-1,5) = 2,5 – 4,5 = -2
J_2: -2
$B_2 = J_2$

P = [0,5; -1,5]

M. A megoldást (számpárt) mindig ABC-sorrendben jegyezzük fel (nem pedig a kiszámítási sorrendben) – a példák egyéb ismeretleneket is tartalmazhatnak mint x és y.

2. egyenlő együtthatók módszere (sčítacia/adičná metóda):

M. Az elnevezés kicsit „sántít” – ellentett együtthatók módszere lenne a megfelelő

- úgy szorozzuk az egyenleteket (néha elég egyet), hogy a két egyenletben valamelyik ismeretlen előtt lévő együtthatók ellentett számok legyenek; az az egyenletek összeadásánál eltűnik az összevont egyenletből (összegük nulla)
- a másik ismeretlent behelyettesítve valamelyik egyenletbe számítjuk – célszerű oda, ahol kisebb együtthatók szerepelnek (lehet a nagyobb együtthatósba is, de akkor nagyobb számokkal kell számításokat végeznünk)

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 8 \\ \underline{2x + y} &\underline{= 10} && /.2 \\ 3x - 2y &= 8 \\ \underline{4x + 2y} &\underline{= 20} && /\text{I.} + \text{II.} \\ 7x &= 28 && /:7 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.4 + y &= 10 \\ 8 + y &= 10 && /-8 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

$P = [4; 2]$ + ellenőrzés

3. összehasonlító módszer (porovnávacia/komparačná metóda):

- mindkét egyenletből kifejezzük ugyanazt a kifejezést úgy (lehet az valamelyik ismeretlen is), hogy az egyenletek másik oldalán legfeljebb ugyanaz az egy ismeretlen szerepelhet vagy az sem
- ezek után felírhatjuk a másik oldalak egyenlőségét – egyismeretlenes egyenlet
- a másik ismeretlent a legkisebb együtthatókat tartalmazó egyenletbe helyettesítve számoljuk ki

M. Ritkán adódik olyan alkalom, hogy ezt a módszert alkalmazhassuk. Általában mindenki csak egy módszert használ az első kettőből – a „kedvencét”. Néha viszont az egyenletrendszer eleve olyan alakú, hogy pontosan a másik, „nem kedvelt” módszer gyorsabb és rövidebb megoldást takar. Ez az összehasonlító módszer is ebbe a kategóriába tartozik, ha olyan alakúak az egyenletek, akkor az ember alkalmazza.

$$\begin{array}{rl}
x - 3y = 4 & /.5 \\
\underline{5x + 3y = -1} & \\
5x - 15y = 20 & /+18y \\
\underline{5x + 3y = -1} & \\
5x + 3y = 20 + 18y & \\
\underline{5x + 3y = -1} & \\
20 + 18y = -1 & /-20 \\
18y = -21 & /:18 \\
y = -\frac{21}{18} = -\frac{7}{6} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
x - 3.\left(-\frac{7}{6}\right) = 4 & \\
x + \frac{7}{2} = 4 & /-\frac{7}{2} \\
x = \frac{1}{2} &
\end{array}$$

$P = \left[\frac{1}{2}; -\frac{7}{6}\right]$ + ellenőrzés

4. grafikus módszer (grafická metóda):

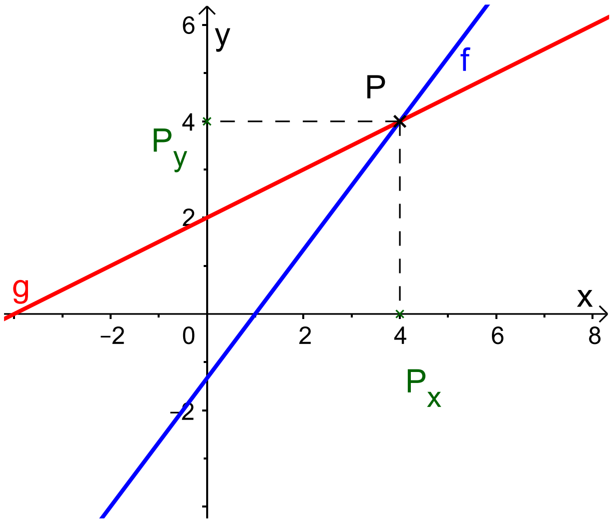
- mindkét egyenletből kifejezzük az y-t, ezzel tulajdonképpen két lineáris függvényt kapunk
- megrajzoljuk a két függvény grafikonját (két egyenes) egy közös koordináta-rendszerbe, ezek metszéspontjának (ha van) két koordinátája a megoldása az egyenletrendszernek

M. Ez a módszer csak akkor működik, ha a megoldás egy egész számokból álló számpár. Különben nem túl pontos.

$$\begin{array}{rl}
4x - 3y = 4 & /-4x \\
\underline{x - 2y = -4} & /-x \\
-3y = 4 - 4x & /:(-3) \\
\underline{-2y = -4 - x} & /:(-2) \\
y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3} & \\
y = \frac{1}{2}x + 2 &
\end{array}$$

$f: y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$

$g: y = \frac{1}{2}x + 2$



$P = [4; 4]$ + ellenőrzés

A példák többsége olyan, melyekben két közönséges egyenlet alkotja az egyenletrendszert, legfeljebb racionális együtthatókat tartalmaznak (számot a nevezőben). De vannak azért bonyolultabb példák is, ahol törtkifejezések is előfordulnak.

példa:

Oldjuk meg az egyenletrendszert:

a, $\frac{4}{x}+\frac{7}{y}=\frac{1}{15}$
$\frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-\frac{19}{15}$

b, $\frac{2}{2x-y}+\frac{3}{x+3y}=-\frac{13}{5}$
$\frac{1}{2x-y}-\frac{4}{x+3y}=\frac{21}{5}$

a,

$x;\ y \neq 0$

tüntessük el a törtkifejezéseket

$\frac{4}{x}+\frac{7}{y}=\frac{1}{15}$ /.15xy
$\frac{2}{x}-\frac{3}{y}=-\frac{19}{15}$ /.15xy

$60y + 105x = xy$
$30y - 45x = -19xy$ /.(-2)

elimináljuk a baloldalon az y-t

$60y + 105x = xy$
$\underline{-60y + 90x = 38xy}$ /I. + II.
$195x = 39xy$

redukáljuk az egyenletet majd kiemelünk x-et

$195x - 39xy = 0$
$x(195 - 39y) = 0$

a feltétellel biztosítottuk, hogy az x és az y nullától különböznek → eloszthatjuk egyenletünket x-szel

$195 - 39y = 0$ /+39y
$195 = 39y$ /:39
$5 = y$
$\frac{4}{x}+\frac{7}{5}=\frac{1}{15}$ /.15x
$60 + 21x = x$ /-21x
$60 = -20x$ /:(-20)
$-3 = x$

$P = [-3; 5]$ + ellenőrzés

---

b,

$2x - y \neq 0$
$2x \neq y$

$x + 3y \neq 0$

$x \neq -3y$

$$\frac{2}{2x-y} + \frac{3}{x+3y} = -\frac{13}{5}$$
$$\frac{1}{2x-y} - \frac{4}{x+3y} = \frac{21}{5}$$

próbáljunk egy más, egyszerűbb módszert (bár hosszabb lesz)
vezessünk be új ismeretleneket (helyettesítés/szubsztitúció):

$$a = \frac{1}{2x-y}$$
$$b = \frac{1}{x+3y}$$

ezután egyenletrendszerünk átalakul:

$$2a + 3b = -\frac{13}{5} \qquad /.5$$
$$a - 4b = \frac{21}{5} \qquad /.5$$
$$10a + 15b = -13$$
$$\underline{5a - 20b = 21} \qquad /.(-2)$$
$$10a + 15b = -13$$
$$\underline{-10a + 40b = -42} \qquad /I. + II.$$
$$55b = -55 \qquad /:55$$
$$b = -1$$

$$5a - 20.(-1) = 21 \qquad /-20$$
$$5a = 1 \qquad /:5$$
$$a = \frac{1}{5}$$

bár az egyenletrendszer a helyettesítés után egyszerűbb, viszont ki kell még számítanunk az eredeti ismeretleneket – plusz munka

$$a = \frac{1}{2x-y}$$
$$\frac{1}{5} = \frac{1}{2x-y} \qquad /.5(2x-y)$$
$$2x - y = 5$$
$$b = \frac{1}{x+3y}$$
$$-1 = \frac{1}{x+3y} \qquad /.(x+3y)$$
$$-1.(x + 3y) = 1$$
$$-x - 3y = 1$$

$$2x - y = 5$$
$$\underline{-x - 3y = 1} \qquad /.2$$
$$2x - y = 5$$
$$\underline{-2x - 6y = 2} \qquad /I. + II.$$
$$-7y = 7 \qquad /:(-7)$$
$$y = -1$$

$$2x - (-1) = 5 \qquad /-1$$
$$2x = 4 \qquad /:2$$
$$x = 2$$

P = [2; -1] + ellenőrzés

Három lineáris egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszer

Általános alakja (átalakítások után: törteket eltüntetve, zárójeleket felbontva, tagokat rendezve és összevonva):

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$, ahol a_1; a_2; a_3; b_1; b_2; b_3; c_1; c_2; c_3; d_1; d_2; $d_3 \in \mathbb{R}$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

T. Az így átalakított egyenletrendszernek a megoldása, ha létezik, az alábbi számhármas (feltétel: a nevezőben szereplő kifejezés $\neq 0$):

$$x = \frac{b_2c_3d_1+b_1c_2d_3+b_3c_1d_2-b_2c_1d_3-b_3c_2d_1-b_1c_3d_2}{a_1b_2c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3}$$

$$y = \frac{a_1c_3d_2+a_3c_2d_1+a_2c_1d_3-a_3c_1d_2-a_1c_2d_3-a_2c_3d_1}{a_1b_2c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3}$$

$$z = \frac{a_1b_2d_3+a_3b_1d_2+a_2b_3d_1-a_3b_2d_1-a_1b_3d_2-a_2b_1d_3}{a_1b_2c_3+a_3b_1c_2+a_2b_3c_1-a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3}$$

A megoldás során fokozatosan tüntetjük el az ismeretleneket. Megszorozva és két-két egyenletet összeadva két egyenletből álló kétismeretlenes egyenletrendszert kapunk előbb. A további megoldási módszert pedig magunk választjuk meg.

Oldjuk meg az $M = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmazon az egyenletrendszert:

a, $$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 22 \\ -x + 2y - 4z &= -30 \\ 3x - y + 2z &= 25 \end{aligned}$$

b, $$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 4y + 5z &= -6 \\ 3x - 6y - 2z &= -5 \end{aligned}$$

a,

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 22 & & \\ -x + 2y - 4z &= -30 & & /I. + 2.II. \\ \underline{3x - y + 2z} &\underline{= 25} & & /3.II. + III. \\ 2x - 3y + z &= 22 & & \\ \underline{-2x + 4y - 8z} &\underline{= -60} & & \\ y - 7z &= -38 & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -3x + 6y - 12z &= -90 \\ \underline{3x - y + 2z} &\underline{= 25} \\ 5y - 10z &= -65 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - 7z &= -38 & & /.(-5) \\ \underline{5y - 10z} &\underline{= -65} & & \\ -5y + 35z &= 190 & & \\ \underline{5y - 10z} &\underline{= -65} & & /I. + II. \\ 25z &= 125 & & /:25 \\ z &= 5 & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - 7.5 &= -38 & & \\ y - 35 &= -38 & & /+35 \\ y &= -3 & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 3.(-3) + 5 &= 22 & & \\ 2x + 9 + 5 &= 22 & & /-14 \\ 2x &= 8 & & /:2 \\ x &= 4 & & \end{aligned}$$

P = [4; -3; 5] + ellenőrzés

---

b,

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 & & \\ 4y + 5z &= -6 & & \\ \underline{3x - 6y - 2z} &\underline{= -5} & & /3.I. + (-2).III. \\ 6x + 9y &= 3 & & \\ \underline{-6x + 12y + 4z} &\underline{= 10} & & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 21y + 4z &= 13 & & /.5 \\ \underline{4y + 5z} &\underline{= -6} & & /.(-4) \\ 105y + 20z &= 65 & & \\ \underline{-16y - 20z} &\underline{= 24} & & /I. + II. \\ 89y &= 89 & & /:89 \\ y &= 1 & & \end{aligned}$$

$$2x + 3.1 = 1$$

$2x + 3 = 1 \quad /-3$

$2x = -2 \quad /:2$

$x = -1$

$4.1 + 5z = -6$

$4 + 5z = -6 \quad /-4$

$5z = -10 \quad /:5$

$z = -2$

P = [-1; 1; -2] + ellenőrzés