Sorozatok
(Postupnosti)

D. A ***sorozat*** egy olyan függvény, melynek értelmezési tartománya a természetes számok részhalmaza (ne felejtsük, hogy maga a halmaz is részhalmaza önmagának – vagyis akár az egész természetes számok halmaza lehet az értelmezési tartomány).
Ha az értékkészlet számhalmaz, akkor ezt ***számsorozat***nak (číselná postupnosť) nevezzük.

A sorozat ***tagok***ból (člen) áll.

$\{a_n\}_1^7$: 11; -8; $\frac{5}{3}$; π; $\sqrt{6}$; 0; 102
$\{b_n\}_1^\infty$: 1; 3; 5; 7; 9; …
$\{c_n\}_1^\infty$: -1; -1; 1; 5; 11; 19; 29; 41

M. Amennyiben nem szeretnénk részletezni a sorozat tagjainak a számát, használhatunk egy rövidebb jelölésmódot is: $\langle d_n \rangle$.

Az a sorozat ***általános*** vagy ***n-edik tagjá***t (všeobecný/n-tý člen) a_n-nel jelöljük. A jobb alsó index a sorozat tagjának a sorszámát jelenti – ezek pontosan az értelmezési tartomány számai. Ha a sorozat egy konkrét tagjára hivatkozunk, akkor az indexbe egy konkrét természetes szám kerül – a tag sorszáma.

$a_4 = \pi$	az a sorozat negyedik tagja
$b_{11} = 21$	a b sorozat tizenegyedik tagja
$c_9 = 55$	a c sorozat kilencedik tagja

véges sorozat (konečná postupnosť) – véges (értelmezési tartománya véges halmaz)
végtelen sorozat (nekonečná postupnosť) – végtelen számú tagból áll (értelmezési tartománya az egész ℕ halmaz)

növekvő sorozat (rastúca postupnosť) – a sorozat következő tagja mindig nagyobb az előtte lévőtől:
$\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} > a_n \Rightarrow$
$\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} - a_n > 0 \land \forall n \in \mathbb{N}: \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \ (a_n \neq 0)$

M. A véges sorozatoknál az előző meghatározásokban és tulajdonságokban (és a következőkben is) az ℕ halmazt le kell szűkíteni (ez helyettesítést jelent) az értelmezési tartomány számaira – az n index lehetséges értékeire.

csökkenő sorozat (klesajúca postupnosť) – a sorozat következő tagja mindig kisebb az előtte lévőtől:
$\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} < a_n \Rightarrow$
$\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} - a_n < 0 \land \forall n \in \mathbb{N}: \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \ (a_n \neq 0)$

nemcsökkenő sorozat (neklesajúca postupnosť) – a sorozat következő tagja mindig nagyobb az előtte lévőtől vagy vele egyenlő:
$\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} \geq a_n \Rightarrow$
$\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} - a_n \geq 0 \land \forall n \in \mathbb{N}: \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \ (a_n \neq 0)$

nemnövekvő sorozat (nerastúca postupnosť) – a sorozat következő tagja mindig kisebb az előtte lévőtől vagy vele egyenlő:
$\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} \leq a_n \Rightarrow$
$\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1} - a_n \leq 0 \land \forall n \in \mathbb{N}: \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \ (a_n \neq 0)$

alternáló sorozat (alternujúca postupnosť) – a sorozat páros és páratlan tagjainak ellentett az előjele:
$\forall n \in \mathbb{N}: a_{n+1}.a_n < 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: \frac{a_{n+1}}{a_n} < 0 \ (a_n \neq 0)$

alulról korlátos sorozat (zdola ohraničená postupnosť) – a sorozat minden tagja nagyobb vagy egyenlő, mint D (legalább D):
$\exists D \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq D$

felülről korlátos sorozat (zhora ohraničená postupnosť) – a sorozat minden tagja kisebb vagy egyenlő, mint H (legfeljebb H):
$\exists H \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: a_n \leq H$

korlátos sorozat (ohraničená postupnosť) – alulról és felülről is korlátos sorozat
$\exists D; H \in \mathbb{R}: \forall n \in \mathbb{N}: D \leq a_n \leq H$

sorozat megadása (určenie postupnosti):

a, a sorozat összes tagjainak felsorolásával – leírjuk a sorozat összes tagját

- így elméletileg csak véges sorozatokat lehet megadni (Végtelen sorozatokat is meg lehet határozni ezzel a módszerrel. Felsoroljuk a sorozat néhány első tagját úgy, hogy a felsorolásból már mindenki számára egyértelmű legyen maga a sorozat.)

$\{d_n\}_1^5$: 6; 7; 11; 19; 28

$\{e_n\}_1^\infty$: 5; 10; 15; 20; 25; 30; …

b, a sorozat általános tagjának megadásával – előírás (n-t, mint ismeretlent tartalmazó képlet/függvény) a sorozat n-edik tagjának a kiszámítására

- véges és végtelen sorozatokat is lehet így megadni
- az így megadott sorozatnál azonnal kiszámítható a sorozat bármelyik tagja

$\{f_n\}_1^{20}$: $f_n = 4n - 3 \land n \in \mathbb{N} \land n \in \langle 1; 20\rangle \rightarrow f_{13} = 4.13 - 3 = 52 - 3 = 49$

$\{g_n\}_1^\infty$: $g_n = n^2 + n \land n \in \mathbb{N} \rightarrow g_{98} = 98^2 + 98 = 9\,604 + 98 = 9\,702$

c, rekurzív módon – előírás, melyben a következő tag néhány előtte lévő tagból számítható ki

- sajnos ezen módszerrel az n-edik tagot csak az összes előtte lévő tag ismeretében tudjuk kiszámolni
- a sorozat elejéből annyi tagot kell ismernünk, amennyi különböző tagot tartalmaz az ilyen előírásunk

$\{h_n\}_1^\infty$: $h_{n+2} = 3h_{n+1} - 2h_n \land h_1 = 2; h_2 = 5; \land\ n \in \mathbb{N} \rightarrow h_7 = ?$

$h_7 = 3h_6 - 2h_5$

$h_6 = 3h_5 - 2h_4$

$h_5 = 3h_4 - 2h_3$

$h_4 = 3h_3 - 2h_2$

$h_3 = 3h_2 - 2h_1 = 3.5 - 2.2 = 15 - 4 = 11$

$h_4 = 3h_3 - 2h_2 = 3.11 - 2.5 = 33 - 10 = 23$

$h_5 = 3h_4 - 2h_3 = 3.23 - 2.11 = 69 - 22 = 47$

$h_6 = 3h_5 - 2h_4 = 3.47 - 2.23 = 141 - 46 = 95$

$h_7 = 3h_6 - 2h_5 = 3.95 - 2.47 = 285 - 94 = 191$

A legismertebb rekurzióval adott sorozat a Fibonacci sorozat. A sorozat minden következő tagja az előtte lévő két tagból számolható. Konkrétan mint azok összege.

az első két tagja adott: $F_1 = F_2 = 1$

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

A Fibonacciho sorozat számai: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233; …

T. (Binet-*formula*)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

karakterisztikus egyenlete: $x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

példa:

Írjuk fel a sorozat első öt tagját:

a, $a_n = 2 + 3n$ b, $b_n = 4n(n - 3)$ c, $c_n = 5[(-1)^n + 1]$

a, $a_1 = 2 + 3.1 = 2 + 3 = 5$

$a_2 = 2 + 3.2 = 2 + 6 = 8$

$a_3 = 2 + 3.3 = 2 + 9 = 11$

$a_4 = 2 + 3.4 = 14$

$a_5 = 2 + 3.5 = 17$

b, $b_1 = 4.1.(1 - 3) = 4.(-2) = -8$

$b_2 = 4.2.(2 - 3) = 8.(-1) = -8$

$b_3 = 4.3.(3 - 3) = 12.0 = 0$

$b_4 = 4.4.(4 - 3) = 16.1 = 16$

$b_5 = 4.5.(5 - 3) = 20.2 = 40$

c, $c_1 = 5.[(-1)^1 + 1] = 5.(-1 + 1) = 5.0 = 0$

$c_2 = 5.[(-1)^2 + 1] = 5.(1 + 1) = 5.2 = 10$
$c_3 = 5.[(-1)^3 + 1] = 5.(-1 + 1) = 0$
$c_4 = 5.[(-1)^4 + 1] = 5.(1 + 1) = 10$
$c_5 = 5.[(-1)^5 + 1] = 5.(-1 + 1) = 0$

Írjuk fel a rekurzióval adott sorozat első tíz tagját

a, $a_1 = 5$, $a_2 = 7$; $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ b, $b_1 = -4$; $b_{n+1} = b_n + 3$

a, $a_3 = a_2 - a_1 = 7 - 5 = 2$
$a_4 = a_3 - a_2 = 2 - 7 = -5$
$a_5 = a_4 - a_3 = -5 - 2 = -7$
$a_6 = a_5 - a_4 = -7 - (-5) = -2$
$a_7 = a_6 - a_5 = -2 - (-7) = 5$
$a_8 = a_7 - a_6 = 5 - (-2) = 7$
$a_9 = a_8 - a_7 = 7 - 5 = 2$
$a_{10} = a_9 - a_8 = 2 - 7 = -5$

b, $b_2 = b_1 + 3 = -4 + 3 = -1$
$b_3 = b_2 + 3 = -1 + 3 = 2$
$b_4 = b_3 + 3 = 2 + 3 = 5$
$b_5 = 5 + 3 = 8$; $b_6 = 8 + 3 = 11$; $b_7 = 11 + 3 = 14$
$b_8 = 14 + 3 = 17$; $b_9 = 17 + 3 = 20$; $b_{10} = 20 + 3 = 23$

Fejezzük ki a sorozat n-edik tagját:

a, x; 3x 5x; 7x; … b, a; a^2; a^4; a^8; …
c, $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5}$; $-\frac{2}{3}$; … d, 1; 3; 9; 27; 81; …

a, $a_n = (2n - 1)x$

b, $b_n = a^{2^{n-1}}$

c, $c_n = (-1)^{n-1}.\frac{n}{n+2}$

d, $d_n = 3^{n-1}$